

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



УТВЕРЖДАЮ
Декан ФГО

УТВЕРЖДАЮ /А.В. Артамонова/
(Ф.И.О. декана (директора института))

14.02.2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б.1.1.4.9 Числовые системы

(код и наименование дисциплины по учебному плану)

Направление подготовки (специальность)	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Квалификация выпускника	Бакалавр (бакалавр/магистр/специалист)
Направленность	Математика и экономика

Курс	3
Семестр	6

Распределение учебного времени

Трудоемкость по учебному плану	108 / 3	часов/зачетных единиц
Лекции	14	часов
Лабораторные работы	-	часов
Практические занятия	28	часов
Иная контактная работа	-	часов
Всего контактной работы (без учета экз.)	42	часов
Контактная работа по экзамену	-	часов
Курсовой проект (работа)	6	семестр
Самостоятельная работа обучающихся (без учета экз.)	66	часов
Самостоятельная работа по подготовке к экзамену	-	часов
Экзамен	-	семестр
Зачет	-	семестр
БРК, ДЗ	6	семестр

(год)

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО направления подготовки (специальности) 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Программу составили:

старший преподаватель	ВМ	СОГЛАСОВАНО	С.Н. Сусанина
(должность)	(кафедра)		(И.О. Фамилия)

РАССМОТРЕНА и ОДОБРЕНА на заседании кафедры, за которой закреплена дисциплина
Кафедра высшей математики

		(наименование кафедры)	
14.01.2026	протокол №	5	
(дата)			
Заведующий кафедрой	СОГЛАСОВАНО	В.А. Иванов	
		(И.О. Фамилия)	

Рабочая программа СОГЛАСОВАНА с факультетом (институтом), выпускающей(ими) кафедрой(ами).

СООТВЕТСТВУЕТ действующей ОП.

Заведующий кафедрой	СОГЛАСОВАНО	А.Г. Фурин
		(И.О. Фамилия)

Председатель методической комиссии факультета (института), в который входит выпускающая кафедра

СОГЛАСОВАНО	А.В. Артамонова
	(И.О. Фамилия)

Эксперт(ы): Николаев Евгений Петрович, Директор МБОУ "Средняя общеобразовательная школа № 31 г. Йошкар-Олы"

Рабочая программа проверена и зарегистрирована в УМЦ 19.02.2026 г.

Специалист учебно-методического центра СОГЛАСОВАНО /И.Р. Валиева/

Раздел 1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины является достижение планируемых результатов обучения, соответствующих установленным в ОПОП индикаторам достижения компетенций:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения
1. ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).	знания: Знает структуру, содержание, закономерности, принципы и особенности изучаемых явлений и процессов, базовые теории в предметной области числовых систем умения: Умеет анализировать и выделять базовые составляющие поставленных задач; осуществлять отбор учебного содержания для реализации в различных формах обучения. навыки: Владеет методами установления причинно-следственных связей и определения наиболее значимых среди них в решении поставленных задач
	ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	знания: Знает источники информации, требуемой для решения поставленной задачи умения: Умеет анализировать содержание, закономерности, принципы и особенности изучаемых явлений и процессов, базовые теории в предметной области числовых систем навыки: Владеет механизмами поиска информации, в том числе с применением современных информационных и коммуникационных технологий
	ПК-1.3. Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.	знания: Знает возможные методики проведения учебных занятий, способы решения типовых умения: Умеет обосновывать варианты решений поставленных задач навыки: Владеет опытом и навыками использования знаний и умений и навыков в предметной области числовых систем для проектирования и реализации образовательного процесса в образовательных организациях общего образования
2. ПК-3 Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов	ПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).	знания: Знает основы проектно-исследовательской деятельности обучающихся; особенности интеграции учебных предметов для организации исследовательской деятельности умения: Умеет организовывать и проводить занятия с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов навыки: Владеет опытом и навыками организации проектно-исследовательской деятельности обучающихся;

обучения средствами преподаваемых учебных предметов	ПК-3.2. Использует образовательный потенциал социокультурной среды региона в преподавании (предмета по профилю) в учебной и во внеурочной деятельности.	знания: Знает способы планирования, реализации и контроля проектно-исследовательской деятельности обучающихся для обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики. умения: Умеет планировать реализовывать, контролировать проектно-исследовательскую деятельность обучающихся навыки: Владеет навыками организации учебного процесса с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.
	ПК-3.3. Знает психолого-педагогические условия создания развивающей образовательной среды для достижения личностных и метапредметных результатов обучения	знания: Знает характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике умения: Умеет оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; навыки: Владеет опытом и навыками организации проектно-исследовательской деятельности обучающихся

Раздел 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части ОПОП.

Дисциплина является обязательной

Для продолжения формирования заявленных компетенций необходимы знания предшествующих дисциплин: Математический анализ (ПК-1), Геометрия (ПК-1), Алгебра (ПК-1), Теория чисел (ПК-1), Педагогика (ПК-3), Математический анализ (ПК-3), Алгебра (ПК-3)

Изучаемая дисциплина является основой для продолжения формирования указанных компетенций в следующих дисциплинах: Элементарная математика (ПК-1), Численные методы (ПК-1), Исследование операций (ПК-1), Исследование операций (ПК-3), Теория функций комплексного переменного (ПК-3), Теория функций действительного переменного (ПК-3); государственной итоговой аттестации в форме: Выполнение и защита выпускной квалификационной работы (ПК-3), Выполнение и защита выпускной квалификационной работы (ПК-1)

Раздел 3. ОПИСАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Для формирования заявленных компетенций используются методологические технологии, реализующие деятельностный, личностно-ориентированный, практико-ориентированный подходы.

Основными стратегическими технологиями являются: лекционные занятия, практические занятия, процедуры самообучения

На достижение конкретных целей обучения направлены применяемые тактические технологии: задания, информационные, классическая лекция

Раздел 4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6 семестр

Виды и темы занятий	Количество часов	Формируемые компетенции
Раздел 1. Первичные понятия. Натуральные числа. Целые числа. Рациональные числа.	52	ПК-1, ПК-3
Лекция. Первичные понятия. Числовые и алгебраические системы. Определения основных понятий.	2	
Практическое занятие. Первичные понятия. Числовые и алгебраические системы. Определения основных понятий.	4	
Лекция. Натуральные числа. Натуральный ряд. Сложение. Аддитивная полугруппа натуральных чисел. Умножение. Полукольцо натуральных чисел. Отношение "меньше". Линейно упорядоченное множество натуральных чисел. Различные виды доказательств по индукции. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел. Индуктивные определения. Изоморфизм одноименных систем натуральных чисел. Конечные и счетные множества.	2	
Практическое занятие. Натуральные числа. Натуральный ряд. Сложение. Аддитивная полугруппа натуральных чисел. Умножение. Полукольцо натуральных чисел. Отношение "меньше". Линейно упорядоченное множество натуральных чисел. Различные виды доказательств по индукции. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел. Индуктивные определения. Изоморфизм одноименных систем натуральных чисел. Конечные и счетные множества.	4	
Лекция. Целые числа. Определение системы целых чисел. Существование системы целых чисел. Основные свойства системы целых чисел.	2	
Практическое занятие. Целые числа. Определение системы целых чисел. Существование системы целых чисел. Основные свойства системы целых чисел.	4	
Лекция. Рациональные числа. Определение системы рациональных чисел. Существование системы рациональных чисел. Основные свойства системы рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями.	2	
Практическое занятие. Рациональные числа. Определение системы рациональных чисел. Существование системы рациональных чисел. Основные свойства системы рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями.	4	
Задания для самостоятельной работы, в том числе выполнение КР, курсового проекта/работы, РГР 1. Изучить рекомендованную учебную и учебно-методическую литературу и электронные образовательные ресурсы. 2. Выполнить задания текущего контроля в соответствии с электронным курсом. выполнение курсового проекта/работы	28 20	
Действительные числа. Комплексные, двойные и дуальные числа. Алгебры над полем действительных чисел.	36	ПК-1, ПК-3

Лекция. Действительные числа. Определение системы действительных чисел. Существование системы действительных чисел. Представление действительных чисел десятичными дробями. Изоморфизм упорядоченных полей действительных чисел. Аксиома Архимеда и усиленная аксиома Кантора в упорядоченных полях. Степени и логарифмы. Другие определения системы действительных чисел. p -адические числа.	2
Практическое занятие. Действительные числа. Определение системы действительных чисел. Существование системы действительных чисел. Представление действительных чисел десятичными дробями. Изоморфизм упорядоченных полей действительных чисел. Аксиома Архимеда и усиленная аксиома Кантора в упорядоченных полях. Степени и логарифмы. Другие определения системы действительных чисел. p -адические числа.	4
Лекция. Комплексные, двойные и дуальные числа. Комплексные числа. Основные свойства комплексных чисел. Двойные и дуальные числа.	2
Практическое занятие. Комплексные, двойные и дуальные числа. Комплексные числа. Основные свойства комплексных чисел. Двойные и дуальные числа.	4
Лекция. Алгебры над полем действительных чисел. Кватернионы. Общая характеристика некоторых числовых систем.	2
Практическое занятие. Алгебры над полем действительных чисел. Кватернионы. Общая характеристика некоторых числовых систем.	4
Задания для самостоятельной работы, в том числе выполнение КР, РГР 1. Изучить рекомендованную учебную и учебно-методическую литературу и электронные образовательные ресурсы. 2. Выполнить задания текущего контроля в соответствии с электронным курсом.	18
Иная контактная работа: дифференцированный зачет (БРК), защита курсового проекта/работы	0

Раздел 5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение дисциплины Б.1.1.4.9 "Числовые системы" рекомендуется начать с ознакомления с рабочей программой, ее структурой и содержанием разделов. Учебный материал структурирован, изучение дисциплины осуществляется в тематической последовательности.

Занятия лекционного типа дают систематизированные знания по дисциплине "Числовые системы", концентрируют внимание на наиболее сложных и важных вопросах. Во время лекционных занятий рекомендуется вести конспектирование учебного материала;

обращать внимание на формулировки и категории, раскрывающие суть проблемы, явления или процесса; зафиксировать выводы и практические рекомендации.

Подготовка к **практическим занятиям** включает ознакомление с планом практического занятия; работу с конспектом лекций, выполнение домашнего задания, работу с учебной и учебно-методической литературой, научными изданиями и электронными образовательными ресурсами, рекомендованными рабочей программой дисциплины "Числовые системы".

Содержание **самостоятельной работы** определяется рабочей программой дисциплины "Числовые системы" оценочными и методическими материалами, заданиями и указаниями преподавателя. Самостоятельная работа может осуществляться в аудиторной и внеаудиторной формах. Эффективным средством осуществления самостоятельной работы является электронная информационно-образовательная среда университета, которая обеспечивает доступ к образовательной программе, рабочей программе дисциплины "Числовые системы", к электронным библиотечным системам, профессиональным базам данных и информационным справочным системам.

Изучение дисциплины "Числовые системы" включает выполнение расчетно-графической работы, контрольной работы.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине "Числовые системы" **дифференцированный зачёт** (6 семестр).

В процессе освоения дисциплины предусматривается организация совместной деятельности обучающихся и преподавателя, в форме курсовой работы.

Курсовая работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, который выполняется студентом в соответствии с учебным планом в рамках дисциплины, относится к виду самостоятельной работы и представляет собой исследование социально значимой проблемы, проводимое самостоятельно под руководством преподавателя по определённым темам дисциплины. Курсовая работа выполняется в обязательном порядке и представляет

собой документально оформленный результат работы обучающегося, целью и содержанием которой является развитие умений и навыков, осваиваемых в рамках его основной образовательной программы путём решения научных, экономических, технологических, творческих и иных социально значимых задач, а также достижение образовательных результатов: командная работа, гражданская идентичность и солидарность, развитие убеждений и ценностных ориентаций, рефлексивность и осознанность, созидательный труд, профессионализм и ответственность.

Курсовая работа рассматривается как форма промежуточной аттестации с формой итогового контроля – **дифференцированный зачёт** (6 семестр).

Для выполнения курсовой работы назначается руководитель.

Руководитель:

- составляет задание на курсовую работу и план-график выполнения задания;
- организует систематические консультации с целью оказания организационной и методической помощи обучающемуся;
- следит за осуществлением выполнения работы в соответствии с планом-графиком;
- проверяет содержание завершённой работы.

Требования к содержанию и оформлению курсовых работ.

Курсовая работа является работой, содержащей итоги самостоятельного исследования (проекта) по выбранной теме. Объем курсовой работы – 25 – 45 страниц (формат А4). Работа должна начинаться с титульного листа. Нумерация страниц курсовой работы должна начинаться с 3-ей страницы (титульный лист считается первой страницей, содержание работы – второй страницей). Номер страницы ставится в правом верхнем (нижнем) углу страницы. Размер левого поля – 3 см. Размер правого поля – 1 см. Размер верхнего и нижнего поля – 2 см. Каждый новый абзац должен

начинаться с красной строки. Каждая новая глава начинается с нового листа. Шрифт - Times New Roman, 14. Текст печатается через 1,5 интервал. Работа оформляется в одном экземпляре. Приложение выносится за пределы

Курсовая работа имеет следующую структуру:

- титульный лист;
- оглавление;
- введение (актуальность темы, разработанность темы, цель, задачи работы (проекта), объект исследования, предмет исследования, гипотеза);
- основная часть (состоит из глав и параграфов; каждая глава раскрывает тот или иной аспект заявленной темы и должна завершаться обобщающими выводами);
- заключение;
- список использованной литературы (все приводимые данные в работе должны в обязательном порядке иметь ссылку на источник).

Критериями оценки курсовой работы являются: актуальность; цели и задачи; методология и подходы; результаты и достижения;

Обучающийся может выбрать тему курсовой работы из числа тем, предложенных руководителем (образовательной организацией), а также может самостоятельно предложить тему с обоснованием её целесообразности и вовлечённости в этот проект партнёрской организации.

Темы курсовых работ:

1. Аксиоматика Пеано. Система натуральных чисел.
2. Метод математической индукции.
3. Построение системы натуральных чисел.

4. Свойства сложения и вычитания натуральных чисел.
5. Свойства умножения натуральных чисел.
6. Порядок на $\mathbb{N}$. Основные свойства порядка на $\mathbb{N}$.
7. Полная упорядоченность множества натуральных чисел.
8. Аддитивная группа целых чисел.
9. Естественное умножение целых чисел.
10. Теорема о делении с остатком в кольце целых чисел.
11. Делимость в кольце целых чисел.
12. Поле частных области целостности. Существование. Единственность.
13. Поле рациональных чисел. Сравнение рациональных чисел.
14. Понятие упорядоченного поля. Свойства.
15. Модуль. Свойства модуля.
16. Аксиоматическое определение поля действительных чисел.
17. Геометрическое представление комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи.
18. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме записи. Геометрический смысл.
19. Изоморфизм одноименных систем натуральных чисел.
20. Представление рациональных чисел десятичными дробями.

Раздел 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-методическое обеспечение

№№ п/п	Список используемой литературы	Количество экземпляров печатных изданий, имеющих в библиотеке, или электронный адрес издания (ресурса) в сети Интернет
УЧЕБНЫЕ, УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И НАУЧНЫЕ ИЗДАНИЯ		
1.	Бухштаб, А. А. Теория чисел [Текст] : учебное пособие для вузов / Бухштаб А. А. 9-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2025. - 384 с. с. ISBN 978-5-507-53510-1.	https://e.lanbook.com/book/489338
2.	Глухов, М. М. Алгебра [Электронный ресурс] : учебник для вузов / Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А.; Елизаров В. П., Нечаев А. А. 5-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2024. - 608 с. ISBN 978-5-507-49133-9.	https://e.lanbook.com/book/379334
3.	Тропин, М. П. Теория чисел [Электронный ресурс] : учебник для вузов / Тропин М. П. 2-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2023. - 240 с. ISBN 978-5-507-45436-5.	https://e.lanbook.com/book/269906
4.	Кундышева, Елена Сергеевна. Математика [Электронный ресурс] / Е. С. Кундышева. Москва: Дашков и К, 2015. - 534 с. ISBN 978-5-394-02261-6.	http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=72390
5.	Смолин, Юрий Николаевич. Алгебра и теория чисел [Текст] : [учеб. пособие для физико-мат. фак. высш. пед. учеб. заведений] / Ю. Н. Смолин. 3-е изд., испр. . М.: ФлинтаНаука, 2006. - 463 с. ISBN 5-9765-0050-15-02-034913-5. Экземпляры: всего 19.	19
6.	Башмаков, Марк Иванович. Алгебра и начала анализа [Текст] : 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений / М. И. Башмаков. 5-е изд., стер. Москва: Дрофа, 2005. - 395, [1] с. ISBN 5-7107-8882-1. Экземпляры: всего 32.	32
7.	Кузнецов, Борис Тимофеевич. Математика [Текст] : [учеб. для студентов вузов по специальности экономики и упр. (060000)] / Б. Т. Кузнецов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 718 с. ISBN 5-238-00754-X. Экземпляры: всего 133.	133
ЭЛЕКТРОННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ		
1.	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU	http://elibrary.ru
2.	Научная электронная библиотека «Киберленинка»	http://cyberleninka.ru

6.2. Материально-техническая база и программное обеспечение

№№ п/п	Аудитории для проведения учебных занятий, самостоятельной работы и проведения государственной итоговой аттестации	Перечень основного оборудования	Программное обеспечение
1.	448 (I)	Комплект учебной мебели (1)	Microsoft Windows Enterprise, Microsoft Office Standard, Агент Dr.Web, Microsoft Access, Microsoft Visio Professional, Microsoft Project Professional,

		Microsoft Visual Studio Enterprise, Комплект ПО для решения основных пользовательских задач
--	--	---

Раздел 7. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ/ ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Критерии оценивания индикаторов достижения компетенций направлены на:

- усвоение теоретического материала (объем знаний, глубина усвоения), предусмотренного рабочей программой;
- умение излагать материал (четкость, грамотность изложения материала, точность и полнота воспроизведения учебного материала);
- умение применять теоретические знания при решении практических заданий.

Шкала оценивания представлена ниже.

Уровень сформированности элементов компетенции	Критерии оценивания	Шкала оценивания
Пороговый уровень	Обучающийся имеет знания основного материала, проявляет умение логично его излагать, но может допускать неточности в изложении материала, недостаточно правильные формулировки, испытывает затруднения в выполнении практических заданий.	удовлетворительно
Продвинутый уровень	Обучающийся твердо знает программный материал, излагает его грамотно и по существу, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения	хорошо
Высокий уровень	Обучающийся глубоко и прочно усвоил программный материал, грамотно и логически стройно его излагает, дает исчерпывающие ответы на поставленные вопросы. В ответе тесно увязывается теория с практикой, при этом обучающийся не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, показывает знакомство с монографической литературой, периодическими изданиями, правильно обосновывает принятые решения, свободно владеет разносторонними навыками, приемами выполнения практических работ	отлично

7.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины (модуля) и производится с применением технологии рейтингового контроля в соответствии с технологической картой дисциплины. Порядок составления технологической карты и алгоритм проведения процедуры оценивания видов деятельности обучающихся, направленных на освоение знаний, умений, навыков и/или опыта деятельности, по накопительной системе в баллах устанавливается положением о системе РИТМ в ФГБОУ ВО «ПГТУ»

7.2. Промежуточная аттестация обучающихся

Промежуточная аттестация обучающихся направлена на оценивание результатов обучения по дисциплине (модулю) и проводится с использованием фондов оценочных средств.

Примеры типовых контрольных заданий из базы фонда оценочных средств по образовательной программе.

1. Какое из приведенных утверждений не входит в систему аксиом Пеано?

а) $(\exists n \in \mathbb{N}) n \cdot 0 = 0$;

б) $(\forall n \in \mathbb{N}) n \cdot 0 = 0$;

в) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

2. Укажите верное утверждение.

а) $[(0 \in A) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) n \in A \Rightarrow n + 1 \in A] \Rightarrow A = \mathbb{N}$;

б) $[(A \subset \mathbb{N}) \wedge (0 \in A) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) n \in A \Rightarrow n + 1 \in A] \Rightarrow A = \mathbb{N}$;

в) $[(A \subset \mathbb{N}) \wedge (0 \in A) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) n + 1 \in A \Rightarrow n \in A] \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

3. Какая из приведенных аксиом Пеано является слабой формой ассоциативности сложения в системе натуральных чисел?

а) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m + 1 = n + 1 \Rightarrow m = n$;

б) $(\forall n \in \mathbb{N}) n + 0 = n$;

в) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

4. На какой из приведенных аксиом Пеано основан принцип математической индукции?

а) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m + (n + 1) = (m + n) + 1$;

б) $[(A \subset \mathbb{N}) \wedge (0 \in A) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) n \in A \Rightarrow n + 1 \in A] \Rightarrow A = \mathbb{N}$;

в) $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

5. Укажите верные утверждения:

а) На множестве натуральных чисел определена структура мультипликативного моноида;

б) На множестве натуральных чисел определена структура мультипликативной группы;

в) На множестве натуральных чисел определена структура аддитивной группы.

6. Укажите верное определение:

а) Множество называется вполне упорядоченным, если оно линейно упорядоченное и любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент;

б) Множество называется вполне упорядоченным, если оно линейно упорядоченное и любое его подмножество имеет наименьший элемент;

в) Множество называется вполне упорядоченным, если оно упорядоченное и любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

7. Укажите неверное утверждение ($\forall a, b, c \in \mathbb{N}$)

а) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$;

б) $a < b \Rightarrow ac < bc$;

в) $a < b \wedge c \neq 0 \Rightarrow ac < bc$.

8. Укажите верное утверждение.

а) Пусть $m\mathbb{Z} = \{mx | x \in \mathbb{Z}\}$, где $m \in \mathbb{N}$. Для любого $m \neq 0$ существует инъективное отображение множества $\mathbb{Z}$ на $m\mathbb{Z}$;

б) Пусть $m\mathbb{Z} = \{mx | x \in \mathbb{Z}\}$, где $m \in \mathbb{N}$. При некотором $m \neq 0$ существует инъективное отображение множества $\mathbb{Z}$ на $m\mathbb{Z}$;

в) Пусть $m\mathbb{Z} = \{mx | x \in \mathbb{Z}^+\}$, где $m \in \mathbb{N}$. Для любого $m \neq 0$ не существует инъективное отображение множества $\mathbb{Z}$ на $m\mathbb{Z}$.

9. Укажите верное утверждение.

а) Для любых целых a, b при $b \neq 0$ существует единственная пара целых чисел q, r такая, что $a = qb + r$ и $0 < r < b$;

б) Для любых целых a, b при $b \neq 0$ существует единственная пара целых чисел q, r такая, что $a = qb + r$ и $0 \leq r < |b|$;

в) Для любых целых a, b при $b \neq 0$ существует единственная пара целых чисел q, r такая, что $a = qb + r$ и $0 < r < |b|$.

10. Укажите неверное утверждение:

а) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) bc|ac \Rightarrow b|a$;

б) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) b|a \Rightarrow bc|ac$;

в) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) bc \nmid ac \Rightarrow b \nmid a$.

11. Докажите индукцией по n , что множество из n элементов имеет 2^n подмножеств.

12. Докажите формулы:

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$;

б) $(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$;

в) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = n(2n - 1)(2n + 1)/3$.

13. Докажите, что для любого натурального $n > 1$

$(x + 1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n$.

14. Покажите, что для любых натуральных чисел a, b и c выполняется неравенство $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

15. Пусть $m\mathbb{Z} = \{mx | x \in \mathbb{Z}\}$, где m — натуральное число.

Покажите, что при $m \neq 0$ существует инъективное отображение множества $\mathbb{Z}$ на $m\mathbb{Z}$.

16. Пусть $\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}, +, -\}$ и m — фиксированное целое число.

Покажите, что алгебра $m\mathbb{Z} = \{m\mathbb{Z}, +, -\}$ является подгруппой группы $\mathbb{Z}$. Покажите, что любая подгруппа группы $\mathbb{Z}$ совпадает с группой $m\mathbb{Z}$ для некоторого натурального m .

17. Докажите, что для любых целых a и b : если $a|b$ и $b \neq 0$, то $|a| \leq |b|$; если $a|b$ и $|b| < |a|$, то $b = 0$.

18. Докажите, что для любых целых a и b : $|ab| = |a| \cdot |b|$,
 $|a + b| \leq |a| + |b|$.

19. Докажите, что для любого целого a и любого целого положительного b существует единственное целое число n такое, что $nb \leq a < (n + 1)b$.

20. Докажите следующее обобщение теоремы о делении с остатком: для любых целых a и b при $b \neq 0$ существует единственная пара целых чисел q, r такая, что $a = bq + r$ и $0 \leq r < |b|$.

21. Покажите, что каждое подкольцо поля является областью целостности.

22. Пусть $F = \{\mathbf{F}, +, -, 1, <\}$ — упорядоченное поле и $a, b, c, ?? \in \mathbf{F}$. Докажите, что тогда:

а) если $a + c < b + c$, то $a < b$;

б) если $a - b < a - c$, то $b > c$;

в) если $0 < c$ и $ac < bc$, то $a < b$;

г) если $0 < a < b$, то $0 < 1/b < 1/a$.

23. Пусть даны положительное действительное число a и комплексное число c . Найдите множество точек плоскости, которые изображают комплексные числа z , удовлетворяющие условиям: $|z| = a$; $|z - c| = a$; $|z| < a$; $|z - c| < a$; $|z - 1| \leq 1$; $|z - 1 - i| < 2$; $|z - 1| + |z + 1| = 2$.

24. Решите систему уравнений:

$$ix + (1 + i)y = 3 - i, \quad (1 - i)x - (6 - i)y = 4;$$

$$(2 + i)x - (3 + i)y = i, \quad (3 - i)x + (2 + i)y = -i.$$

25. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа: $1, i, -1, -i, 1 + i, 1 - i, -1/2 + i\sqrt{3}/2, \sqrt{3} + i$.

26. Найдите множество точек плоскости, изображающих

комплексные числа z , для которых: $\arg z = 0$; $\arg z = \pi/3$; $\arg z = \pi$; $\arg z = \pi/2$.

Перечень вопросов для проведения промежуточной аттестации

1. Числовые и алгебраические системы. Определения основных понятий.
2. Натуральный ряд.
3. Сложение. Аддитивная полугруппа натуральных чисел.
4. Умножение. Полукольцо натуральных чисел.
5. Отношение "меньше". Линейно упорядоченное множество натуральных чисел.
6. Различные виды доказательств по индукции.
7. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел.
8. Индуктивные определения.
9. Изоморфизм одноименных систем натуральных чисел.
10. Конечные и счетные множества.
11. Определения системы целых чисел.
12. Существование системы целых чисел.
13. Основные свойства системы целых чисел.
14. Определение системы рациональных чисел.
15. Существование системы рациональных чисел.
16. Основные свойства системы рациональных чисел.

17. Представление рациональных чисел десятичными дробями.
18. Определение системы действительных чисел.
19. Существование системы действительных чисел.
20. Представление действительных чисел десятичными дробями.
21. Изоморфизм упорядоченных полей действительных чисел.
22. Аксиома Архимеда и усиленная аксиома Кантора в упорядоченных полях.
23. Степени и логарифмы.
24. Другие определения систем действительных чисел.
25. p -адические числа.
26. Комплексные числа.
27. Основные свойства комплексных чисел.
28. Двойные и дуальные числа.
29. Кватернионы.
30. Общая характеристика некоторых числовых систем.